第 3 节 不等式的进阶方法（★★★）

内容提要

有的题目用基本不等式比较麻烦，若掌握一些拓展的方法和不等式，则可以快速求解问题. 但本节的方法非必学内容，同学们可选择性地学习. 有关的拓展方法和不等式如下：

1．柯西不等式：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$，当且仅当 $b_i=0(i=1,2,\cdots,n)$ 或存在实数 λ 使得 $a_i=\lambda b_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时等号成立. 实际操作时，二维、三维形式的柯西不等式用得较多.

①二维形式的柯西不等式：$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\ge(x_1x_2+y_1y_2)^2$，当且仅当 $x_1y_2=x_2y_1$ 时等号成立.

②三维形式的柯西不等式：$(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)\ge(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2$，当且仅当 $x_1=y_1=z_1=0$ 或存在实数 λ 使得 $\begin{cases}x_2=\lambda x_1\\y_2=\lambda y_1\\z_2=\lambda z_1\end{cases}$ 时等号成立.

提醒：用柯西不等式求最值的核心在于凑出柯西不等式的形式以及凑定值，在一些带有平方和结构的求最值问题中，使用柯西不等式可以快速调节系数，凑出定值.

2．权方和不等式：设 x、y 均为正数，则 $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}$ 时取等号. 权方和不等式常用于速求一些分式和的最值. 事实上，权方和不等式有更复杂、更一般化的形式，但高考范畴内上述特定条件下的权方和不等式用得最多，本节的题目也只会用到它，故其它形式此处不再给出.

3．三角换元法：涉及平方和或平方差为常数的求最值问题，可考虑三角换元法. 例如，若已知 $x^2+y^2=r^2$，则可令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，把求最值的式子化为关于 θ 的函数来分析；若已知 $x^2-y^2=r^2$，则可令 $\begin{cases}x=\dfrac{r}{\cos\theta}\\y=r\tan\theta\end{cases}$. 在高考范畴内，一般平方和的三角换元比较常用，平方差的三角换元用得较少.

典型例题

类型Ⅰ：柯西不等式的应用

【例 1】已知 $b_1^2+b_2^2=5$，则 $3b_1+4b_2$ 的最大值为_____.

解析：条件中有平方和结构，考虑用柯西不等式，为了产生 $3b_1+4b_2$，两端同乘以 3^2+4^2，

因为 $b_1^2+b_2^2=5$，所以 $125=(3^2+4^2)(b_1^2+b_2^2)\ge(3b_1+4b_2)^2$，故 $3b_1+4b_2\le5\sqrt5$，

取等条件是 $\dfrac{b_1}{3}=\dfrac{b_2}{4}$，结合 $b_1^2+b_2^2=5$ 可得此时 $b_1=\dfrac{3\sqrt5}{5}$，$b_2=\dfrac{4\sqrt5}{5}$，所以 $(3b_1+4b_2)_{\max}=5\sqrt5$.

答案：$5\sqrt5$

【变式 1】已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，$a+2b+3c=6$，则 $a^2+4b^2+9c^2$ 的最小值为_____.

解析：求最值的式子中有平方和结构，考虑用柯西不等式，注意到 $a^2+4b^2+9c^2=a^2+(2b)^2+(3c)^2$，所以凑一个 $1^2+1^2+1^2$，系数就恰为所给等式的结构，

因为 $a+2b+3c=6$，所以 $a^2+4b^2+9c^2=\dfrac13\times(1^2+1^2+1^2)(a^2+4b^2+9c^2)\ge\dfrac13(1\times a+1\times2b+1\times3c)^2=12$，

取等条件是 $\frac{a}{1}=\frac{2b}{1}=\frac{3c}{1}$，结合 $a+2b+3c=6$ 可得此时 $a=2$，$b=1$，$c=\frac{2}{3}$，故 $(a^2+4b^2+9c^2)_{\min}=12$.

答案：12

【变式 2】设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，$x^2+y^2+z^2=25$，则 $x-2y+2z$ 的最大值是_____，最小值是_____.

解析：给出的是三项平方和，考虑用柯西不等式，为了凑出 $x-2y+2z$，可乘以系数 $1^2+(-2)^2+2^2$，

因为 $x^2+y^2+z^2=25$，所以 $25\times9=[1^2+(-2)^2+2^2](x^2+y^2+z^2)\geq[1\cdot x+(-2)\cdot y+2\cdot z]^2=(x-2y+2z)^2$，

故 $-15\leq x-2y+2z\leq15$，取等条件是 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{2}$，结合 $x^2+y^2+z^2=25$ 可得 $\begin{cases}x=-\frac{5}{3}\\y=\frac{10}{3}\\z=-\frac{10}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\y=-\frac{10}{3}\\z=\frac{10}{3}\end{cases}$，

它们分别对应左、右两侧取等的情形，所以 $x-2y+2z$ 的最大值为 15，最小值为 -15.

答案：15，-15

【总结】从上面几道题可以看出，涉及 $Ax^2+By^2+Cz^2(A,B,C>0)$ 和 $ax+by+cz$ 之间的最值问题，可考虑用柯西不等式快速调节系数得出结果，需注意一次项这部分的系数 a，b，c 可以为负，如上面的变式 2.

类型Ⅱ：权方和不等式的应用

【例 2】已知 $0<x<1$，则 $\frac{9}{x}+\frac{16}{1-x}$ 的最小值为_____.

解析：涉及分式和的最值，考虑权方和不等式，此处分子为常数，分母之和为定值，可直接用，

由权方和不等式，$\frac{9}{x}+\frac{16}{1-x}=\frac{3^2}{x}+\frac{4^2}{1-x}\geq\frac{(3+4)^2}{x+(1-x)}=49$，取等条件是 $\frac{3}{x}=\frac{4}{1-x}$，解得：$x=\frac{3}{7}$，

满足 $0<x<1$，所以 $\frac{9}{x}+\frac{16}{1-x}$ 的最小值是 49.

答案：49

【变式 1】已知 $a>2b>0$，且 $a+b=1$，则 $\frac{1}{a-2b}+\frac{3}{b}$ 的最小值是_____.

解析：涉及分式型最值，考虑权方和不等式，由于分母之和 $(a-2b)+b$ 不是常数，为了凑出分母之和为定值，在 $\frac{3}{b}$ 上下同乘以 3，

由权方和不等式，$\frac{1}{a-2b}+\frac{3}{b}=\frac{1^2}{a-2b}+\frac{3^2}{3b}\geq\frac{(1+3)^2}{a-2b+3b}=\frac{16}{a+b}=16$，

取等条件是 $\frac{1}{a-2b}=\frac{3}{3b}$，结合 $a+b=1$ 可得 $\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=\frac{1}{4}\end{cases}$，满足 $a>2b>0$，所以 $\frac{1}{a-2b}+\frac{3}{b}$ 的最小值为 16.

答案：16

【变式 2】已知 $a>1$，$b>1$，则 $\dfrac{b^2}{a-1}+\dfrac{a^2}{b-1}$ 的最小值为_____.

解析：涉及分式型最值，考虑权方和不等式，观察发现此处若用权方和不等式，尽管分子分母都凑不出定值，但可化为 $a+b$ 的整体结构，再进一步分析，

由权方和不等式，$\dfrac{b^2}{a-1}+\dfrac{a^2}{b-1}\ge\dfrac{(b+a)^2}{a-1+b-1}=\dfrac{(a+b)^2}{a+b-2}$ ①，变量 a 和 b 以 $a+b$ 整体形式出现，可换元，

设 $t=a+b-2$，则由 $a>1$，$b>1$ 可得 $t>0$，且 $\dfrac{(a+b)^2}{a+b-2}=\dfrac{(t+2)^2}{t}=\dfrac{t^2+4t+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}+4\ge2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}+4=8$，

结合①可得 $\dfrac{b^2}{a-1}+\dfrac{a^2}{b-1}\ge\dfrac{(a+b)^2}{a+b-2}\ge8$，取等条件是 $\begin{cases}\dfrac{b}{a-1}=\dfrac{a}{b-1}\\ t=a+b-2=2\end{cases}$，此时 $a=b=2$，所以 $(\dfrac{b^2}{a-1}+\dfrac{a^2}{b-1})_{\min}=8$.

答案：8

【总结】权方和不等式可用于速求分式和的最值，故遇到分式相加，可尝试用权方和不等式，先看用了能否凑出定值，若能，则可直接求出最值；若不能，再看看能否化为更优良的结构，如上面的变式 2.

类型III：用三角换元法求最值

【例 3】已知 $b_1^2+b_2^2=5$，则 $3b_1+4b_2$ 的最大值为_____.

解析：此题在上面例 1 中已用柯西不等式求出了最值，其实涉及两项平方和，也可考虑三角换元，

因为 $b_1^2+b_2^2=5$，所以可设 $\begin{cases}b_1=\sqrt5\cos\theta\\ b_2=\sqrt5\sin\theta\end{cases}$，则 $3b_1+4b_2=3\sqrt5\cos\theta+4\sqrt5\sin\theta=5\sqrt5\sin(\theta+\varphi)$，

故当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$3b_1+4b_2$ 取得最大值 $5\sqrt5$.

答案：$5\sqrt5$

【变式 1】已知 $x^2-2xy+2y^2=2$，则 x^2+2y^2 的取值范围是_____.

解析：条件中没有直接给出平方和结构，但观察发现，可通过配方，凑出平方和，

由 $x^2-2xy+2y^2=2$ 可得 $(x-y)^2+y^2=2$，所以可设 $\begin{cases}x-y=\sqrt2\cos\theta\\ y=\sqrt2\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=\sqrt2\sin\theta+\sqrt2\cos\theta\\ y=\sqrt2\sin\theta\end{cases}$，

所以 $x^2+2y^2=(\sqrt2\sin\theta+\sqrt2\cos\theta)^2+2\times(\sqrt2\sin\theta)^2=6\sin^2\theta+2\cos^2\theta+4\sin\theta\cos\theta$

$=2+4\sin^2\theta+2\sin2\theta=2+4\cdot\dfrac{1-\cos2\theta}{2}+2\sin2\theta=4+2\sin2\theta-2\cos2\theta=4+2\sqrt2\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{4})$，

因为 $-1\le\sin(2\theta-\dfrac{\pi}{4})\le1$，所以 $4-2\sqrt2\le x^2+2y^2\le4+2\sqrt2$，故 x^2+2y^2 的取值范围是 $[4-2\sqrt2,4+2\sqrt2]$.

答案：$[4-2\sqrt2,4+2\sqrt2]$

【反思】有的等式虽然没有直接的平方和结构，但可通过配方化为平方和结构，也能用三角换元处理.

【变式 2】$\sqrt{x}+\sqrt{4-x}$ 的取值范围是_____.

解析：这题表面上看与平方和没什么关系，但观察发现$(\sqrt{x})^2+(\sqrt{4-x})^2=4$，所以它其实隐藏了一个平方和为常数的条件，换元即可转化为我们熟悉的形式，

设$a=\sqrt{x}$，$b=\sqrt{4-x}$，则$a\ge 0$，$b\ge 0$，且$a^2+b^2=4$，此时$\sqrt{x}+\sqrt{4-x}=a+b$，

所以问题等价于在$a^2+b^2=4(a\ge 0,b\ge 0)$的条件下，求$a+b$的取值范围，可用三角换元，

设$\begin{cases}a=2\cos\theta\\b=2\sin\theta\end{cases}$，由于$a\ge 0$，$b\ge 0$，所以不妨规定$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

此时$a+b=2\cos\theta+2\sin\theta=2\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$，因为$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，所以$\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

从而$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]$，故$a+b\in[2,2\sqrt{2}]$.

答案：$[2,2\sqrt{2}]$

强化训练

1．（★★）已知$a>0$，则$(a^2+3a+1)(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}+1)$的最小值为_____.

2．（2021•浙江卷改编•★★★）已知实数x，y，z满足$2x+y-\sqrt{5}z=2$，则$x^2+y^2+z^2$的最小值为_____.

3．（★★★）已知$x>1$，$y>1$，$xy=10$，则$\frac{1}{\lg x}+\frac{4}{\lg y}$的最小值是_____.

4．（★★★）已知$a>0$，$b>0$，且$a+b=1$，则$\frac{1}{2a}+\frac{2}{b+1}$的最小值为_____.

5．（2023•全国乙卷•★★★）已知实数x，y满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则$x-y$的最大值是（　　）

（A）$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　（B）4　（C）$1+3\sqrt{2}$　（D）7

6．（2020 • 清华强基试题 • ★★★）若 $x^2+y^2\le 1$，则 x^2+xy-y^2 的取值范围为（　　）

（A）$[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]$　　（B）$[-1,1]$　　（C）$[-\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}]$　　（D）$[-2,2]$

7．（2022 • 新高考Ⅱ卷 • ★★★★）（多选）若实数 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

（A）$x+y\le 1$　　（B）$x+y\ge -2$　　（C）$x^2+y^2\ge 1$　　（D）$x^2+y^2\le 2$